Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2013
Práctica 6

1. Un espacio de Banach es uniformemente convexo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||x|| = ||y|| = 1$ y $||x + y|| > 2 - \delta$ implican que $||x - y|| < \epsilon$.

   Probar que los ℓ^p con $1 < p < \infty$ son uniformemente convexos pero c_0, ℓ^1 y ℓ^∞ no.

2. Sea E un espacio de Banach uniformemente convexo. Probar que todo cerrado convexo de E tiene un unico vector de norma minima.

3. Probar que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

   Sugerencia: Dado x^{**} en E^{**} tomar ϕ en E^* tal que $||\phi|| = 1$ y $|x^{**}(\phi) - 1| < \delta$ y considerar el conjunto $C = \{x : x \in E, ||x|| < 1 \text{ y } |\phi(x) - 1| < \delta\}$.

4. (Bader-Gelander-Monod) Sea E un espacio de Banach $L-$embedded. Para cada subconjunto acotado A definamos su circunradio r_A y su circuncentro $C_E(A)$ como

$$r_A = inf\{r : A \subseteq \overline{B(x,r)} \text{ para algun } x\} \quad \text{y} \quad C_E(A) = \bigcap_{x \in A} \overline{B(x, r_A)}.$$

   a) Demostrar que $C_E(A)$ es convexo, cerrado y acotado.

   b) Demostrar que $C_E(A)$ es $w-$compacto y no vacio usando que $C_E(A) = C_{E^{**}}(A)$.

   c) Si $T : E \to E$ es una isometria tal que $T(A) \subseteq A$ entonces $T(C_E(A)) \subseteq C_E(A)$.

   d) Demostrar que existe v en E tal que si T es una isometria como antes $T(v) = v$.

   Nota: Un espacio de Banach E se dice $L-$embedded si $E^{**} = E \oplus S$ con S un subespacio cerrado de E^{**} tal que $||e + s|| = ||e|| + ||s||$.

5. Sea (X, μ) un espacio de medida. Probar que $L^2(X)$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\,\overline{g}\; d\mu,$$

   resulta un espacio de Hilbert.

   Dar un espacio de Hilbert que no sea (naturalmente isomorfo a) uno como el anterior.

6. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. Si f, g_k estan en $L^2(\Omega)$ decimos que $g_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ en sentido debil si

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) dx = - \int_\Omega g(x) \varphi(x) dx \quad \text{para todo } \varphi \text{ en } C_0^1(\overline{\Omega}).$$

   Probar que $H^1(\Omega)$, el conjunto de todas las f con derivadas debiles en $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno $< f_1, f_2 >= \int (f_1 f_2 + \nabla f_1 \cdot \nabla f_2) dx$.

7. Sea (X, μ) un espacio de medida y $\{H_x\}_{x \in X}$ una familia medible de esp. de Hilbert. Se define $H = \int H_x d\mu$ como las funciones debilmente medibles $f : X \to \bigcup H_x$ tales que $f(x)$ esta en H_x y $||f|| = \int ||f(x)||_x^2 d\mu < \infty$. Probar que $(H, || \, ||)$ es Hilbert.

   Nota: La familia $\{H_x\}_{x \in X}$ se dice medible si existe una particion por conjuntos medibles $X = \bigcup X_n$ y espacios de Hilbert H_n tales que $H_x = H_n$ si x esta en X_n.

8. Demostrar que $(\ell^p, \| \ \|_p)$ con $p \neq 2$ y $(C[0,1], \| \ \|_\infty)$ no son espacios de Hilbert.

9. *a*) Probar que $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ dado por $(v_n)_k = \delta_k^n$ es base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$.

   b) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de $L^2[-1,1]$.

   c) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ es base ortonormal de $L^2[-1,1]$.

   d) Probar que $\{\frac{1}{2^n n!}(\frac{d}{dx})^n (x^2-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ es base ortonormal de $L^2[-1,1]$.

10. Si $\{x_n\}$ es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert y $\{y_n\}$ es una sucesión ortogonal que verifica $\sum ||x_n - y_n||^2 < 1$ entonces $\{y_n\}$ es también completo.

11. Consideremos una base ortonormal $\{e_n\}_n$ de un Hilbert. Probar que $e_n \xrightarrow{w} 0$.

12. Sea $\pi : G \to \mathcal{L}(H)$ una representacion tal que $\pi(g)$ respeta el producto interno para todo g. Demostrar que si existe v tal que $||\pi(g) \cdot v - v|| < \sqrt{2}$ para todo g en G entonces existe $v \neq 0$ tal que $\pi(g) \cdot v = v$ para todo g en G.

13. Sea $\phi : S \to \mathbb{R}$ un subespacio cerrado de un Hilbert H. Probar que existe una unica funcional lineal de H que extiende ϕ y tiene la misma norma.

14. Dadas f en $L^2(\Omega)$ y g en $C^1(\overline{\Omega})$ consideremos la ecuacion diferencial

$$u - \Delta u = f \qquad \text{en } \Omega$$

$$u = g \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

Se define $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $C_0^1(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$. Decimos que u en $H^1(\Omega)$ es una solucion debil de la ecuacion anterior si $u - g$ esta en $H_0^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega uv + \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \text{ para toda } v \text{ en } C_0^1(\overline{\Omega}).$$

Demostrar que existe una unica solucion debil del problema.

15. Dadas f en $L^2(\Omega)$ consideremos la ecuacion diferencial

$$-\Delta u = f \qquad \text{en } \Omega$$

$$u = 0 \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

Decimos que u en $H^1(\Omega)$ es una solucion debil si u esta en $H_0^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \text{ para toda } v \text{ en } C_0^1(\overline{\Omega}).$$

Demostrar que existe una unica solucion debil del problema. Mas aún, probar que la funcion $L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tal que $f \mapsto u$ es un operador lineal continuo.

Sugerencia: Usar Lax-Milgram, la desigualdad de Poincare y que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es una inclusion densa.

16. Sea X un espacio metrico compacto tal que existe un producto interno en $C(X)$ que lo hace un Hilbert y las evaluaciones son continuas. Probar que X es finito.